

# PROBLEMES DE L'AILE ANNULAIRE RESOLUS PAR ANALOGIE RHEOELECTRIQUE

Par L. MALAVARD\* et G. HACQUES†

Laboratoire de Calcul Analogique du C.N.R.S.,  
Paris, France

*Résumé*—La méthode d'analogie rhéoelectrique permet de calculer aisément les propriétés aérodynamiques des surfaces portantes de caractéristiques géométriques quelconques. Le potentiel des vitesses de l'écoulement est identifié au potentiel électrique d'une masse liquide conductrice contenue dans un bassin et les conditions aux limites concernant les surfaces de discontinuité qui correspondent à l'aile et son sillage sont facilement reproduites électriquement.

Les applications présentées concernent une étude systématique de l'aile annulaire. Les principaux problèmes traités ont été les suivants:

- (i) analyse des effets dus à la forme du profil (conicité, volet, courbure, épaisseur) pour des ailes annulaires placées en écoulement axial.
- (ii) aile annulaire sustentatrice en incidence; répartitions de circulation et de pression; actions de plans auxiliaires, influence d'un corps central.
- (iii) étude de l'effet d'une hélice placée à l'intérieur de l'aile annulaire formant carénage.

## INTRODUCTION

1. Dans la théorie linéarisée des écoulements subsoniques autour des surfaces portantes, il est classique de schématiser l'aile et son sillage par des répartitions de tourbillons liés et libres. La loi donnée des angles d'attaque locaux permet alors, en calculant les vitesses induites par le système tourbillonnaire, d'établir l'expression qui régit la répartition de circulation, à priori inconnue, sur l'aile et le sillage.

Cette expression se présente en général sous la forme d'une équation intégrale dont la résolution est nécessaire pour définir les propriétés aérodynamiques de l'aile étudiée. Or la solution explicite de cette équation n'est qu'exceptionnellement atteinte et de ce fait les calculs pratiques relatifs aux surfaces portantes sont le plus souvent longs et laborieux.

La détermination de l'équation intégrale devient inutile lorsqu'on utilise comme moyen de calcul la méthode rhéoelectrique. Dans ce cas, en effet, la solution du problème peut être obtenue directement en identifiant la fonction qui définit le potentiel des vitesses de perturbation (ou quelquefois le potentiel des pressions) au potentiel électrique produit dans un bassin qui figure le domaine de l'écoulement. L'aile et le sillage, considérés comme des surfaces de discontinuité des vitesses, sont alors

\*Professeur d'Aviation à l'Université de PARIS, Directeur du Laboratoire de Calcul Analogique.

†Docteur ès-Sciences, Attaché de Recherches au Centre National de la Recherche Scientifique (C.N.R.S.).

représentés par des plaques minces isolantes, planes ou courbes suivant les applications et recouvertes sur les deux faces de petites électrodes  $e^+$  et  $e^-$  placées en vis-à-vis. En alimentant convenablement ces électrodes il est possible de satisfaire, en moyenne sur chaque élément d'aire qui leur correspond, les conditions aux limites concernant le potentiel ou ses dérivées.

2. Les modes de réalisation rhéoelectrique de ces conditions ont été décrites à propos d'autres applications<sup>(1)</sup>; nous rappellerons seulement que pour le problème général des surfaces portantes elles peuvent être classées en trois catégories principales:

(a) discontinuité connue  $\varphi^+ - \varphi^-$  de la fonction  $\varphi$  entre les valeurs prises de part et d'autre d'une coupure pratiquée au sein de l'écoulement, avec continuité de la dérivée normale  $\partial\varphi/\partial n$  à la traversée de cette coupure.

Dans l'analogie une différence de potentiel électrique  $V^+ - V^-$  est établie entre les électrodes en vis-à-vis  $e^+$  et  $e^-$  au moyen d'un transformateur  $T$  débitant sur un potentiomètre de réglage  $P$  (figure 1). La continuité de la dérivée  $\partial\varphi/\partial n$ , qui est représentée dans l'analogie par l'intensité électrique  $I$  traversant  $e^+$  et  $e^-$ , est automatiquement assurée par le circuit fermé ainsi constitué.

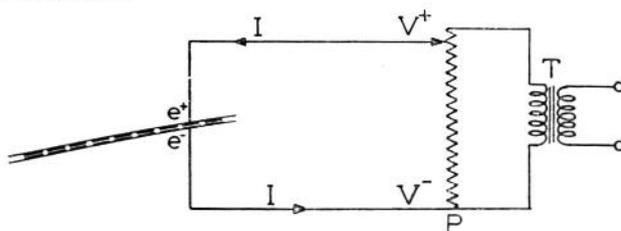


FIG. 1.

(b) dérivée normale  $\partial\varphi/\partial n$  de valeur connue et demeurant continue à la traversée de la coupure. Comme précédemment les électrodes  $e^+$  et  $e^-$  débitent une intensité électrique  $I$  réglée à la valeur désirée grâce au potentiomètre  $P$  et à la résistance  $R$  introduits au secondaire du transformateur  $T$  (figure 2).

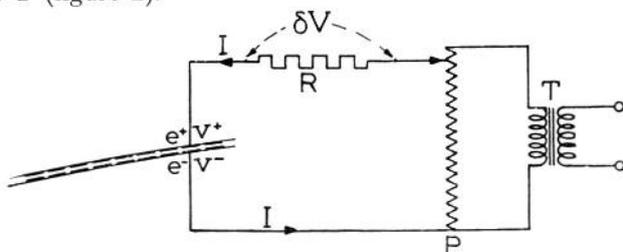


FIG. 2.

(c) *relation linéaire* entre la valeur de la différence  $\varphi^+ - \varphi^-$  prise de part et d'autre de la coupure et la dérivée normale  $\partial\varphi/\partial n$  continue à la traversée. La relation  $\varphi^+ - \varphi^- + a.\partial\varphi/\partial n = b$ , où  $a$  et  $b$  sont connus en tout point de la coupure, est satisfaite automatiquement en l'identifiant à la loi d'ohm écrite pour le circuit de la figure 3 où l'on règle la différence de potentiel  $\Delta V$  à une valeur proportionnelle à  $b$  et la résistance  $R$ , à une valeur proportionnelle à  $a$ .

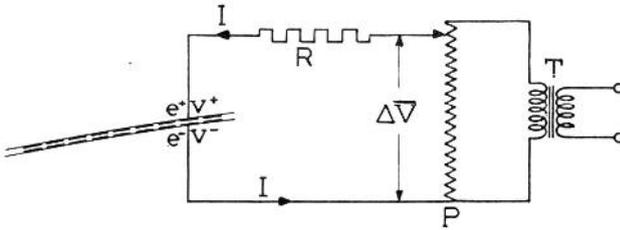


FIG. 3.

Dans de nombreuses études de surfaces portantes des propriétés de symétrie permettent souvent de simplifier les montages précédents qui se réduisent alors aux circuits utilisés dans les représentations classiques des données aux limites des types de Dirichlet, Neumann et Fourier. Nous ne reviendrons pas sur ces réalisations analogiques dont certaines ont été employées dans ce travail mais qui sont maintenant bien connues et exploitées de façon systématique depuis de nombreuses années dans différents laboratoires, tels que ceux de l'O.N.E.R.A.<sup>(2,3)</sup> et du C.N.R.S.

3. La méthode d'analogie rhéoelectrique se prête particulièrement bien à la résolution des problèmes aérodynamiques concernant l'aile annulaire. Les principaux effets dus à la variation des paramètres géométriques de l'aile et de son profil générateur peuvent aisément faire l'objet d'une analyse séparée. Les résultats présentés dans ce mémoire sont extraits d'une étude systématique<sup>(4)</sup>, plus complète, sur les problèmes suivants:

- (i) effets dus à la variation de la forme du profil pour des ailes non portantes placées en écoulement axial; recherche de profils répondant à des distributions de pression imposées; influence du fuselage.
- (ii) effet dû à l'incidence de l'aile annulaire sustentatrice, action de plans auxiliaires, influence du fuselage.
- (iii) effets d'une hélice placée à l'intérieur de l'aile annulaire formant carénage.

Indépendamment de ces calculs analogiques le Professeur Weissinger a effectué une remarquable étude analytique<sup>(5, 6)</sup> des caractéristiques aérodynamiques de l'aile annulaire. D'intéressantes confrontations ont

pu ainsi être établies entre les résultats de l'analyse théorique et ceux obtenus par la méthode rhéoelectrique. Quelques unes de ces comparaisons sont données dans la communication du Professeur Weissinger<sup>(7)</sup>.

#### AILE ANNULAIRE DANS L'ÉCOULEMENT À SYMÉTRIE AXIALE

1. Du point de vue géométrique l'aile annulaire est un obstacle de révolution dont la méridienne reproduit la forme d'un profil d'aile. Lorsque l'axe  $Ox$  de l'aile est parallèle à la vitesse générale  $V_0$  l'écoulement présente la symétrie axiale. Le diamètre  $2a$  de l'aile et la corde  $c$  du profil générateur définissent le paramètre caractéristique  $\lambda = 2a/c$  dont les valeurs envisagées ici variaient entre 0,5 et 1,5.

Le profil, situé dans le plan méridien  $xOy$ , peut être caractérisé par :

1° — l'angle  $\alpha$  de sa corde avec l'axe de révolution (conicité)

2° — une ligne moyenne définissant sa loi de courbure

3° — une loi d'épaisseur.

La symétrie axiale permet l'étude de ces trois effets dans un plan méridien de l'aile et la marche suivie dans la recherche des résultats est comparable à celle de l'étude des profils minces en écoulement bi-dimensionnel, cas limite ( $\lambda = \infty$ ) dont les résultats théoriques bien connus servent de point de comparaison.

2. *Effet de conicité*<sup>(4,8)</sup>. L'aile annulaire est considérée comme constituée d'un profil rectiligne, incliné d'un angle d'attaque  $\alpha$  sur l'axe de symétrie, c'est-à-dire sur la direction de la vitesse générale  $V_0$  du fluide. Le potentiel des vitesses de perturbation  $\varphi(x, y)$  est une fonction harmonique de révolution dont la représentation analogique peut être effectuée, comme il est bien connu, dans un bassin électrique à fond incliné.

Bien que la portance totale de l'aile annulaire soit nulle dans ce cas, il s'établit une circulation  $\Gamma$  autour du profil qui provoque un effort radial dont la valeur peut être déterminée à partir de la connaissance du potentiel  $\varphi$ . Ce potentiel est déterminé par les conditions aux limites suivantes :

(i) le fluide est tangent à l'obstacle, d'où la relation  $\partial\varphi/\partial y = V_0\alpha$  obtenue en confondant la normale au profil avec la direction  $Oy$  et que l'on écrit en tout point du segment  $(0, c)$  projection du profil sur une direction parallèle à l'axe de révolution et à la distance  $a$ . Le profil étant infiniment mince, cette dérivée conserve sa valeur au passage intrados-extrados.

(ii) non uniformité du potentiel  $\varphi$ ; lorsque la circulation  $\Gamma$  est différente de zéro, la fonction  $\varphi$  cesse d'être uniforme autour du segment  $(0, c)$ ; pour l'interprétation analogique il est nécessaire d'envisager une coupure, issue du bord de fuite (B.F) par exemple et s'étendant à l'infini aval dans la direction  $Ox$ . La différence  $\varphi^+ - \varphi^-$  que prend la fonction  $\varphi$  en deux

points, d'abscisse quelconque  $x$ , situés de part et d'autre de cette coupure correspondent à la circulation  $\Gamma$ , dont la valeur est déterminée par la condition de Kutta-Joukowski au bord de fuite qui s'écrit ici  $\partial(\varphi^+ - \varphi^-)_{B.F}/\partial x = 0$ . La conservation du flux aérodynamique à la traversée de la coupure entraîne en outre que  $\partial\varphi^+/\partial y = \partial\varphi^-/\partial y$ .

(iii) à une grande distance du profil les perturbations s'annulent : à l'infini il faut donc vérifier que  $\partial\varphi/\partial x = \partial\varphi/\partial y = 0$ .

Dans le bassin électrique incliné la réalisation de la coupure  $(0, c)$  correspondant à la projection du profil, prolongée de la coupure  $(c, +\infty)$  établie pour tenir compte de la circulation, consiste en une mince lame de Plexiglas. Les électrodes  $e^+, e^-$  qui recouvrent cette lame sont placées normalement à la surface libre du liquide. L'affichage électrique des conditions aux limites précédentes (i) et (ii) est effectué suivant les indications données au début de l'article.

Les résultats du calcul analogique font ressortir la dissymétrie existant entre les caractéristiques aérodynamiques relatives à l'intrados et à l'extrados du profil. La figure 4 en donne un exemple en ce qui concerne les survitesses dues à un angle d'attaque  $\alpha = 1$  degré, dans le cas des ailes coniques  $\lambda = 0,5-0,75-1,25$  et  $1,5$ . La courbe en pointillé correspond à l'écoulement de la plaque plane, c'est-à-dire au cas  $\lambda_\infty$ .

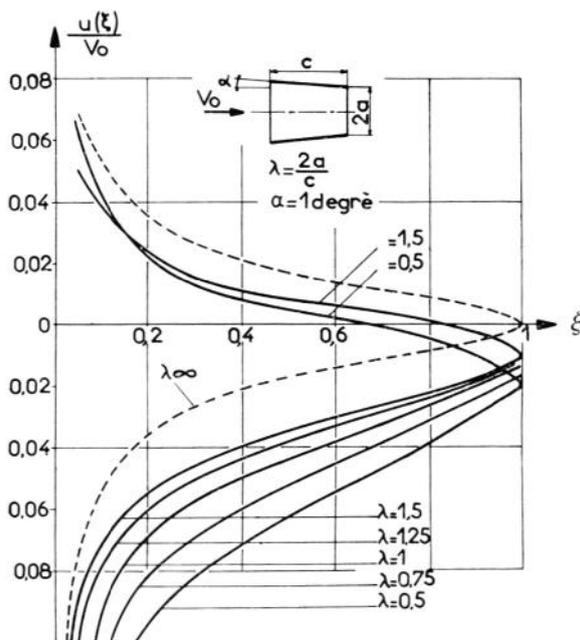


FIG. 4.

Le gradient d'effort radial  $dCz/d\alpha$ , rapporté à la valeur  $dCz/d\alpha=2\pi$  relative à la plaque plane portante, augmente rapidement quand le paramètre  $\lambda$  diminue. Il vaut respectivement 1,81-1,44-1,26-1,17 et 1,13 lorsque  $\lambda$  varie comme ci-dessus.

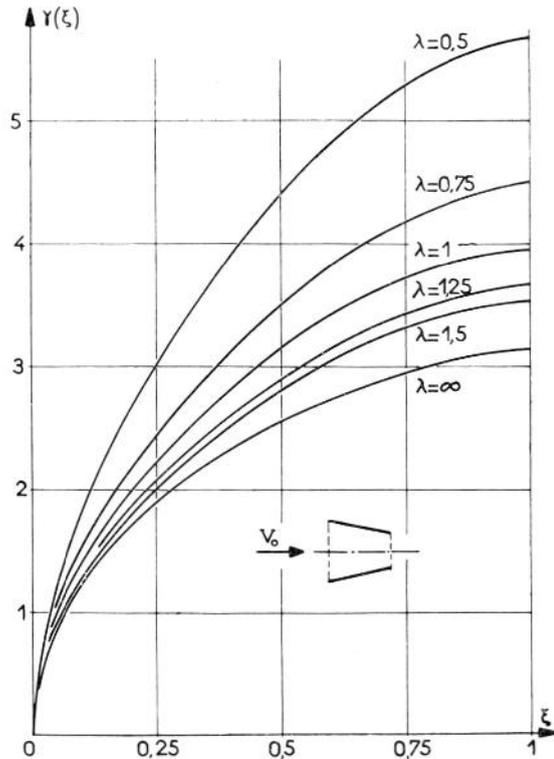
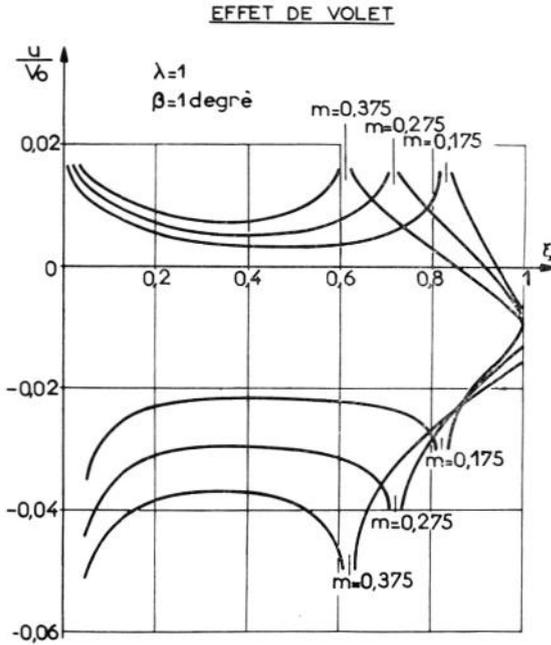


FIG. 5.

La figure 5 donne la circulation réduite  $\gamma = \Gamma/V_0 c \alpha$  le long du profil, en fonction de l'abscisse  $\xi = x/c$ . Comme le montrent ces courbes, la circulation  $\gamma$  se déduit pratiquement de la loi  $\gamma_\infty$  par une affinité dont le module est précisément égal au gradient d'effort radial pour la valeur  $\lambda$  envisagée. L'intégration graphique des fonctions  $\gamma$  a montré que la position du centre de poussée n'était pas affectée par l'effet de révolution.

3. Un cas particulier de cet effet de conicité est celui d'un volet de révolution, placé au bord de fuite du profil, de profondeur relative  $m = t/c$  et braqué de l'angle  $\beta$ . Les conditions aux limites du potentiel de perturbation demeurent inchangées, mais la condition de glissement n'est évidemment écrite que sur le segment  $(t, c)$  figurant le volet. L'efficacité de ce volet annulaire se révèle identique à celle d'un volet placé au bord fuite de la plaque plane. La variation de la profondeur  $t$  donne un déplacement du centre de poussée qui suit la même loi que dans

le cas bidimensionnel. Pour  $\lambda = 1$  et  $\beta = 1$  degré, la figure 6 fournit les survitesses le long du profil et du volet lorsque  $m$  varie.



Comme autre application, on a considéré l'influence d'un corps central d'axe  $Ox$ , de rayon  $a'$  et de longueur indéfinie, placé à l'intérieur de l'aile annulaire conique. Sur ce corps central, la condition de glissement du fluide se traduit simplement par  $\partial\varphi/\partial y = 0$ . Lorsque le paramètre  $k = a'/a$  prend les valeurs 0,3-0,4 et 0,5, le gradient d'effort radial  $dC_{zk}/d\alpha$ , rapporté à celui du profil de l'aile seule, vaut 1,07-1,12 et 1,23 dans le cas  $\lambda = 1$ . La figure 7 donne les survitesses le long du corps central et à l'intrados du profil: pour la gamme des  $\lambda$  envisagés, le corps central n'affecte pas les caractéristiques aérodynamiques de l'extrados.

Signalons enfin que la règle des écoulements inverses, appliquée aux ailes annulaires dont les profils minces sont respectivement définis par les pentes  $\alpha(x)$  et  $\alpha_1(x)$  fournit la relation :

$$\int_0^c (u^+ - u^-) \alpha_1 dx = \int_0^c (u_1^+ - u_1^-) \alpha dx \tag{1}$$

qui relie les survitesses dues aux écoulements de vitesses générales  $V_0$  et  $-V_0$ . Cette relation, où l'on peut choisir  $\alpha_1(x) = -1$ , avec  $\alpha(x) = 0$  sur le segment  $(0, t)$  et  $\alpha(x) = \beta = 1$  sur le segment  $(t, c)$ , permet de calculer l'efficacité du volet considéré ci-dessus par l'expression

$\delta C_z / C_z = \gamma(1 - m) / \gamma(1)$  où la circulation  $\gamma$  est relevée sur la figure 5 aux abscisses  $(1 - m)$  et 1.

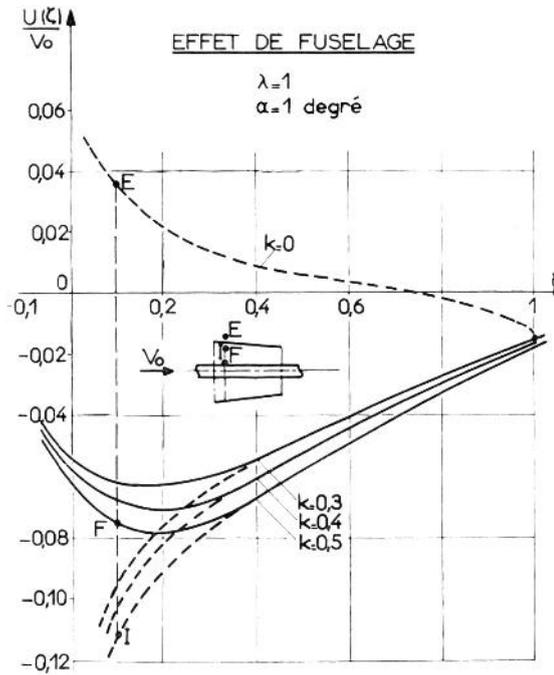


FIG. 7.

4. *Effet de courbure*<sup>(4,9)</sup>. L'étude précédente s'applique de façon dentique à la détermination des caractéristiques aérodynamiques d'un profil mince dont la loi de courbure est définie par la pente  $\alpha(x)$  quelconque. Il suffit de modifier la condition aux limites (i) sur le segment  $(0, c)$  en écrivant  $\partial\varphi/\partial y = -V_0\alpha(x)$ . L'effort radial exercé sur ce profil cambré peut d'ailleurs être calculé directement en appliquant la formule (1) et en utilisant à nouveau les résultats de la figure 5.

D'autres problèmes ont pu être abordés aisément par la méthode rhéoelectrique et en particulier celui qui consiste à rechercher la forme de la ligne moyenne supportant une différence de pression intrados-extrados distribuée en corde suivant une loi donnée. Pour les applications pratiques cette loi est choisie de façon à éviter les survitesses infinies au bord d'attaque, c'est-à-dire que la ligne moyenne est placée à son angle d'attaque idéal  $\alpha_{id}$ , et supporte un effort radial connu, désigné habituellement par  $C_z$  d'adaptation.

Pour traiter ce problème à la cuve électrique on a intérêt à considérer le potentiel d'accélération  $u = \partial\varphi/\partial x$  qui est également une fonction harmonique de révolution. Dans le cas considéré la fonction  $u$  ne présente pas de singularité au bord d'attaque, elle présente par ailleurs l'avantage

de demeurer uniforme, évitant ainsi dans l'interprétation analogique la réalisation de la coupure ( $c, +\infty$ ) que nécessitait la représentation du potentiel  $\varphi$ .

Sur le segment  $(0, c)$  qui correspond au profil, les conditions aux limites concernant  $u$  sont les suivantes:

(i) la différence  $u^+ - u^- = KV_0 F(x)$  est donnée,  $F(x)$  correspond à la différence connue que prennent les vitesses (ou les pressions) à l'abscisse  $x$ .  $K$  est un facteur de proportionnalité.

(ii) la dérivée  $\partial u / \partial y$  est la même à l'extrados et à l'intrados du profil et sa valeur, mesurée dans l'analogie par l'intensité de courant traversant les électrodes, permet d'atteindre la courbure de la ligne moyenne, puisque:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -V_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

et finalement, par double intégration, la forme de cette ligne.

Comme illustration de la méthode, on a choisi les lois  $F_1(x) = 1$  et  $F_2(x) = (1 - x)$  qui définissent les lignes moyennes adaptées NACA  $a = 1$  et  $a = 0$  dans le cas  $\lambda_\infty$  de l'écoulement bidimensionnel. La représentation analogique du potentiel  $u$ , effectuée dans le bassin à fond incliné a permis de déterminer les survitesses le long du profil mince dont la forme est recherchée. Un exemple en est donné par la figure 8 pour la loi  $F_2(x)$ , dans le cas  $\lambda = 1$ . Le calcul des expressions  $\alpha(x)$  et  $y(x)$ , (pente et cote de la ligne moyenne), nécessite de plus la mesure du gradient électrique sur la ligne  $(-\infty, 0)$  qui précède le segment  $(0, c)$ . Lorsque  $\lambda$  diminue, le calcul analogique montre que les lignes moyennes  $F_1$  et  $F_2$  sont de moins en moins cambrées. Dans le cas  $F_2$ , l'incidence idéale décroît avec le paramètre  $\lambda$ ; le rapport  $\alpha_{1d.}/\alpha_{1d.\infty}$  prend les valeurs 0,87-0,65 et 0,49 pour  $\lambda = 1,5-1$  et 0,5. La figure 9 illustre ces résultats.

5. *Effet d'épaisseur*<sup>(4,9)</sup>. En écoulement bidimensionnel l'effet d'épaisseur se détermine en considérant un profil symétrique disposé à l'incidence nulle, c'est-à-dire dont l'axe est parallèle à  $V_0$ . Dans l'écoulement de révolution le profil épais symétrique, générateur de l'aile annulaire, voit naître à son contour une dissymétrie de vitesse et de pression qui provoque un effort radial non nul pour un calage égal à zéro. On peut néanmoins se proposer de rechercher la déformation qu'il faut donner à un profil épais symétrique (choisi pointu à ses extrémités, afin de respecter l'hypothèse de la linéarisation) pour faire disparaître cet effort radial. Le problème traité correspond alors à une "adaptation de la loi d'épaisseur".

Soient  $y^\pm(x)$  et  $\alpha^\pm(x)$  les cotes et les pentes du profil répondant à une telle condition et dont l'épaisseur est  $e$ . Les perturbations apportées à l'écoulement général  $V_0$  s'obtiennent en remplaçant le profil par une distribution de sources et puits répartis sur le segment  $(0, c)$ . Soit  $\varphi$

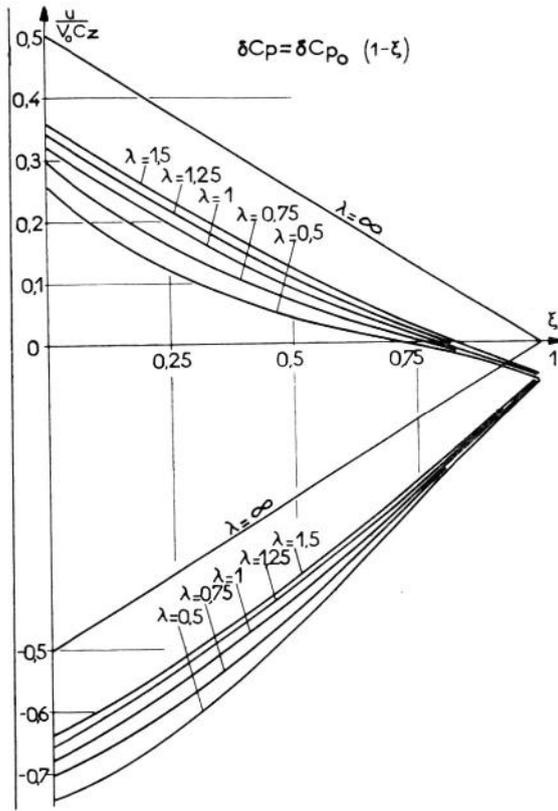


FIG. 8.

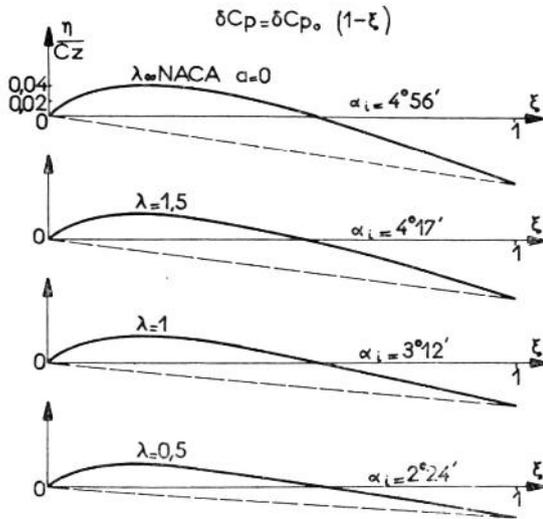


FIG. 9.

le potentiel correspondant, la circulation étant nulle autour du profil, la fonction  $\varphi$  demeure uniforme dans le plan méridien  $xOy$ .

Une façon simple d'obtenir un effort radial nul consiste à imposer la même distribution de pression, ou de vitesse  $[u(x) = \bar{u}(x)]$  à l'extrados et à l'intrados. Si l'on se donne donc la fonction  $u(x)$  ainsi que sa primitive  $\Phi(x)$ , sur le segment  $(0, c)$  la fonction  $\varphi$  qui définit l'écoulement vérifie les conditions aux limites suivantes:

$$\varphi^+ = \varphi^- = \Phi(x) \text{ le long de la coupure } (0, c)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -V_0 \alpha(x) \text{ qui traduit le glissement du fluide sur le profil.}$$

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \text{ à l'infini où les perturbations s'annulent.}$$

Pour fixer les idées on a choisi pour fonction  $\Phi(x)$  celle qui correspond au potentiel des vitesses de l'écoulement *plan* autour du profil parabolique bissymétrique d'épaisseur  $e$ . La représentation analogique, toujours effectuée en bassin à fond incliné, de la fonction  $\varphi$  a fourni les profils

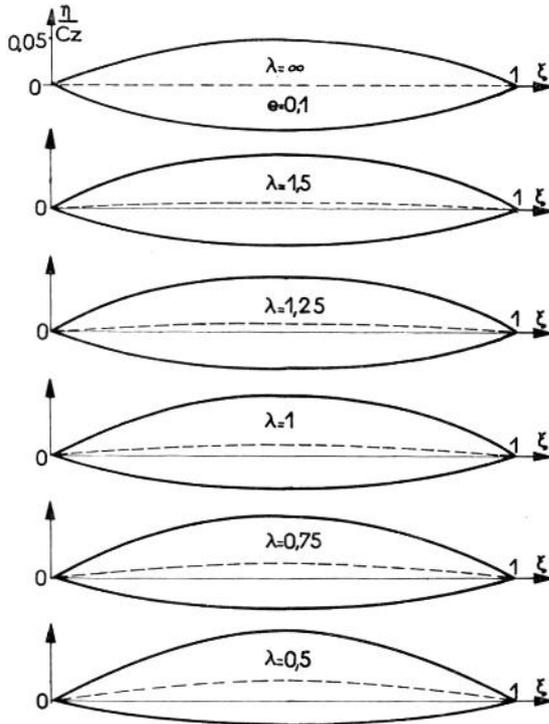


FIG. 10.

épais de la figure 10. L'épaisseur a été trouvée pratiquement constante et égale à  $e$ . Les courbes extrados et intrados sont très voisines de deux paraboles dont le rapport  $n(\lambda)$  des flèches, ou des courbures, au maître-couple du profil croît rapidement lorsque  $\lambda$  diminue.

6. Rappelons enfin que en dehors des hypothèses de la théorie linéarisée il est toujours possible<sup>(1,4)</sup> d'étudier par analogie rhéoelectrique un profil d'aile annulaire de forme donnée. Dans ce cas le modèle analogique, dont le contour reproduit la forme exacte de l'obstacle, est placé dans un champ uniforme d'une cuve inclinée ou hyperbolique suivant que l'on cherche à déterminer le potentiel des vitesses ou la fonction de courant de l'écoulement de révolution.

#### AILE ANNULAIRE EN INCIDENCE<sup>(4,10,11)</sup>

1. Lorsque l'axe de révolution de l'aile annulaire est placé à un angle d'incidence  $i$  par rapport à la direction  $V_0$  du courant général l'écoulement devient tridimensionnel et les caractéristiques aérodynamiques varient dans chaque plan méridien de l'aile. Dans le cadre de la théorie linéarisée l'effet d'incidence peut être déterminé en considérant l'aile annulaire comme une surface *cylindrique* de révolution  $A$ . Le sillage  $\Sigma$  des tourbillons libres, parallèles à  $V_0$ , prolonge cette surface cylindrique jusqu'à l'infini aval. L'ensemble de l'aile et du sillage constitue ainsi une coupure spatiale de discontinuité des vitesses pour le domaine de l'écoulement.

Le potentiel de perturbation  $\Phi(x,y,z)$  est défini dans l'espace  $Oxyz$  ( $Ox$  suivant la direction  $V_0$ ,  $Oz$ : verticale descendante) entaillé par cette coupure d'après des données géométriques, pour la région  $A$ , et des conditions d'équilibre de pression, pour le sillage  $\Sigma$ . La détermination analogique de  $\Phi$  sur les deux faces de la surface  $A$  (coté extérieur +, coté intérieur -) permet d'atteindre les principales caractéristiques aérodynamiques de l'aile.

Avant d'examiner le mode de détermination de  $\Phi$  dans le cas général de la surface portante annulaire il est intéressant d'analyser les simplifications qui peuvent être apportées au schéma précédent pour les valeurs extrêmes du paramètre caractéristique  $\lambda$ : lorsque  $\lambda$  devient très grand ou au contraire très petit.

2. *Cas  $\lambda \rightarrow \infty$ : théorie de l'anneau portant.* Dans ce cas la corde  $c$  est considérée comme très faible vis-à-vis du diamètre  $2a$  de l'aile annulaire. Il est alors classique de réduire la surface  $A$  à une *ligne portante* représentée ici par le cercle  $(C)$  de rayon  $a$ . Si l'on désigne par  $\omega(\theta)$  l'angle d'attaque du profil dont la position est définie par l'angle polaire  $\theta$ , par  $\Gamma(\theta)$  la circulation correspondante et par  $w_n(\theta)$  la vitesse induite par les tourbillons libres, on peut écrire le relation de Prandtl:

$$\Gamma = kcV_0(\omega + w_n/V_0) \quad (2)$$

en tout point du cercle  $(C)$ .

La solution de cette équation peut être obtenue en considérant le champ *plan* des tourbillons libres à l'infini aval (plan de Trefftz). Dans ce plan le potentiel des vitesses subit une discontinuité  $\overset{+}{\varphi} - \overset{-}{\varphi}$ , égale à

la circulation  $\Gamma$ , à la traversée du cercle ( $C$ ) qui correspond à la trace du cylindre  $\Sigma$  formé par les tourbillons libres. Par ailleurs la vitesse induite  $w_n$  est égale à la moitié de la dérivée normale  $\partial\varphi/\partial n$  prise le long de ( $C$ ), de sorte que l'équation (2) peut encore s'écrire :

$$\varphi^+ - \varphi^- = kcV_0 \left( \omega + \frac{1}{2V_0} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) \quad (3)$$

cette relation correspond à une condition aux limites du type (c) envisagée ci-dessus et son interprétation analogique est aisée dans tous les cas<sup>(1)</sup>.

Pour l'aile cylindrique la loi d'angle d'attaque est de la forme  $\omega(\theta) = i \cos \theta$  et le système portant est optimum. Le coefficient de portance  $C_z$  est donné par l'expression classique<sup>(13)</sup> :

$$\frac{C_z}{i} = 1 / \left( \frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{\pi\lambda} \right)$$

lorsque le coefficient aérodynamique  $k$  du profil est pris égal à  $\pi$ .

La méthode analogique permet l'étude d'un système portant quelconque, fermé ou ouvert, dont les lois d'angles d'attaque et de cordes sont données. A titre d'application nous avons traité le cas d'un anneau portant circulaire à corde constante muni de plans horizontaux de formes rectangulaires et elliptiques. Le figure 11 donne la répartition de circulation sur l'anneau et les plans lorsque ces derniers sont disposés à la

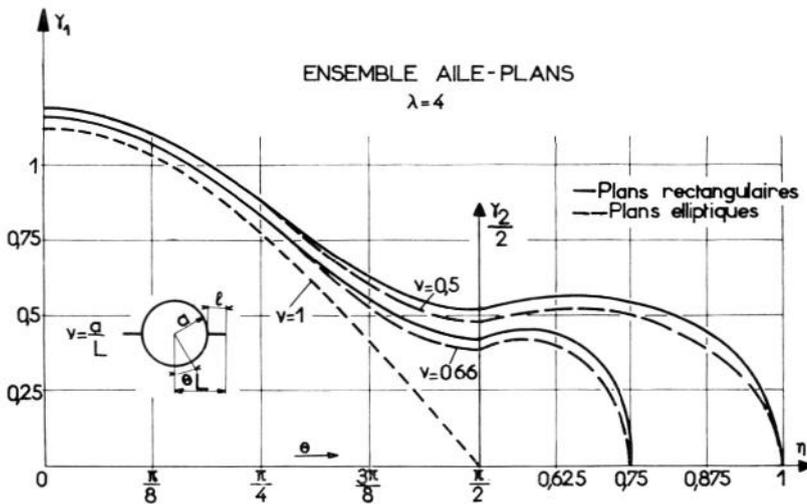


FIG. 11.

même incidence que l'anneau. Les calculs analogiques ont été effectués pour  $\lambda = 4$  et diverses valeurs du paramètre  $\nu = a/L$  ( $L$  demi-envergure de l'ensemble anneau-plans). En vue d'une comparaison avec les

résultats fournis par la théorie de la surface portante les valeurs du gradient de coefficient de portance  $dC_z/di$  correspondant à ces ensembles anneau-plans sont portés sur la figure 20.

3. *Cas  $\lambda \rightarrow 0$ : approximation de R. T. Jones.* Lorsque le rayon  $a$  de l'aile peut être considéré comme très faible devant la corde  $c$  du profil, ou ce qui revient au même lorsque le nombre de Mach de l'écoulement est voisin de l'unité, il est légitime de considérer le potentiel des vitesses  $\varphi$  comme indépendant de l'abscisse  $x$ . La circulation se calcule alors immédiatement et vaut  $\Gamma = 2V_0ia \cos \theta$ , le coefficient de portance est donné par l'expression simple  $C_z = \pi\lambda i/2$ , analogue à celle de l'aile plane de faible allongement.

Si l'aile est munie de plans, une transformation conforme ou un calcul analogique pour des configurations géométriques compliquées, font connaître la répartition de circulation en étudiant le potentiel autour de l'obstacle représenté par la section droite de l'ensemble aile-plans.

4. *Cas général: surface portante annulaire*<sup>(11)</sup>. Pour des valeurs moyennes de  $\lambda$ , comprises par exemple entre 0,5 et 3, les simplifications précédentes cessent d'être acceptables et il est indispensable de traiter l'aile annulaire comme une surface portante.

Pour les réalisations analogiques on a intérêt<sup>(12)</sup> à décomposer le potentiel des vitesses  $\Phi(x, y, z)$  en deux potentiels élémentaires  $\varphi_A$  et  $\varphi_T$ , tels que  $\Phi = \varphi_A + \varphi_T$  et où  $\varphi_A$  correspond au potentiel de l'écoulement axial, parallèle à  $Ox$ , de vitesse  $V_0 \cos i \simeq V_0$  et  $\varphi_T$ , au potentiel de l'écoulement transversal parallèle à l'axe  $Oz$  dont la vitesse à l'infini est égale à  $V_0 i$ .

Seul le potentiel transversal  $\varphi_T$  intervient dans le calcul de l'effet d'incidence de l'aile annulaire. Du point de vue analogique l'introduction de la fonction  $\varphi_T$  permet de simplifier notablement la construction du modèle. Les conditions aux limites le concernant sont les suivantes:

(a) Sur la coupure spatiale cylindrique  $A$  qui schématise l'aile, la condition de glissement du fluide entraîne que  $\partial\varphi_T/\partial n = 0$ .

(b) Sur la coupure  $\Sigma$  qui représente le sillage, l'équilibre des pressions  $p^+$  et  $p^-$  se traduit par:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_T^+ - \varphi_T^-) = 0 \quad \text{ou} \quad (\varphi_T^+ - \varphi_T^-) = \Gamma(\theta):$$

la différence de potentiel de part et d'autre de  $\Sigma$  demeure constante le long d'une génératrice de cette surface et représente la circulation  $\Gamma(\theta)$  autour du profil défini par l'angle  $\theta$ .

(c) La fonction  $\Gamma(\theta)$ , inconnue *a priori*, est déterminée par la condition de Kutta-Joukowski qui impose la continuité des vitesses au bord de fuite de l'aile et s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_T^+ - \varphi_T^-)_{\text{B.F.}} = 0$$

(d) À une distance  $z = H$  suffisamment grande devant le rayon  $a$  la perturbation créée par l'aile dans le courant général s'annule et le potentiel  $\varphi_T$  redevient celui d'un écoulement uniforme  $V_0 i z$  et vaut donc  $\varphi_T(x, y, H) = V_0 i H$ .

(e) Compte tenu des symétries paire ( $\partial\varphi_T/\partial y = 0$  pour  $y = 0$ ) et impaire ( $\varphi_T = 0$  pour  $z = 0$ ) l'étude du champ aérodynamique peut être limitée à un quart de l'espace  $Oxyz$ .

La représentation analogique du potentiel transversal  $\varphi_T$  est effectuée dans un bassin profond dans lequel est plongé le modèle figurant la coupure  $A + \Sigma$ . Le modèle réalisé permettait de faire varier le paramètre  $\lambda$  entre les valeurs 0,5 et 2.

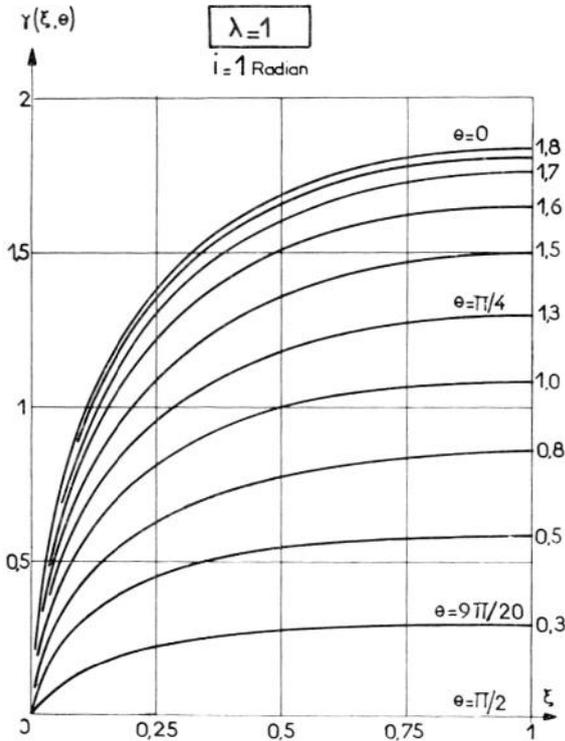


FIG. 12.

4.1. *Résultats du Calcul analogique.* La figure 12 donne un exemple de la répartition de circulation réduite  $\gamma(\xi)$  le long de dix cordes dans le cas  $\lambda = 1$ . La circulation globale  $\gamma(1)$  autour de chaque profil se déduit pratiquement de la courbe  $\gamma_J$ , limite pour  $\lambda \rightarrow 0$  donnée par la théorie de Jones, par une affinité  $\gamma_\lambda/\gamma_J$  qui vaut 0,966 - 0,958 - 0,920 - 0,866 - 0,763 pour les valeurs  $\lambda = 0,5 - 0,66 - 1 - 1,33$  et 2.

La variation du gradient de portance  $C_z/i$  en fonction de  $\lambda$ , en bon accord avec les résultats théoriques de Weissinger, est portée sur la figure 13

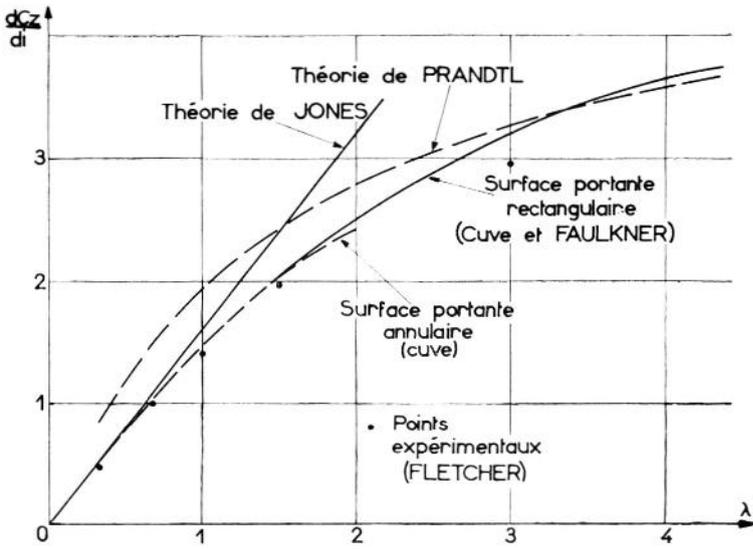


FIG. 13.

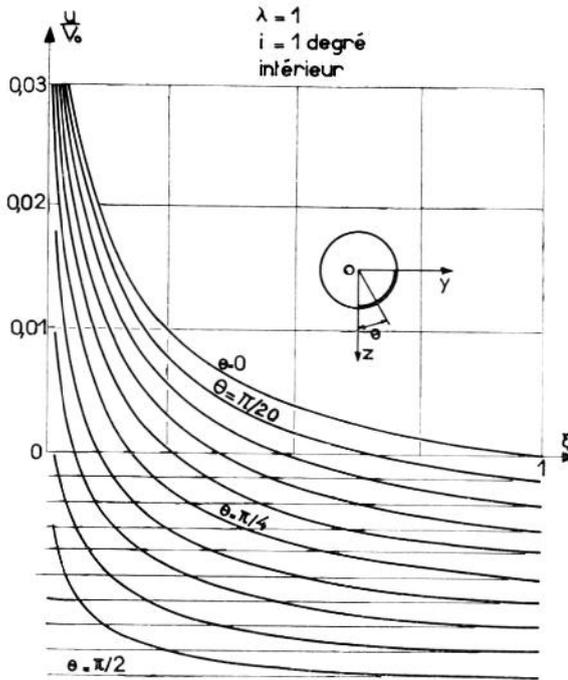


FIG. 14.

et des résultats expérimentaux de Fletcher<sup>(14)</sup>. L'abscisse du centre de poussée et le moment de tangage, déterminés par la méthode analogique, évoluent avec  $\lambda$  suivant une loi très voisine de celle calculée par Weissinger.

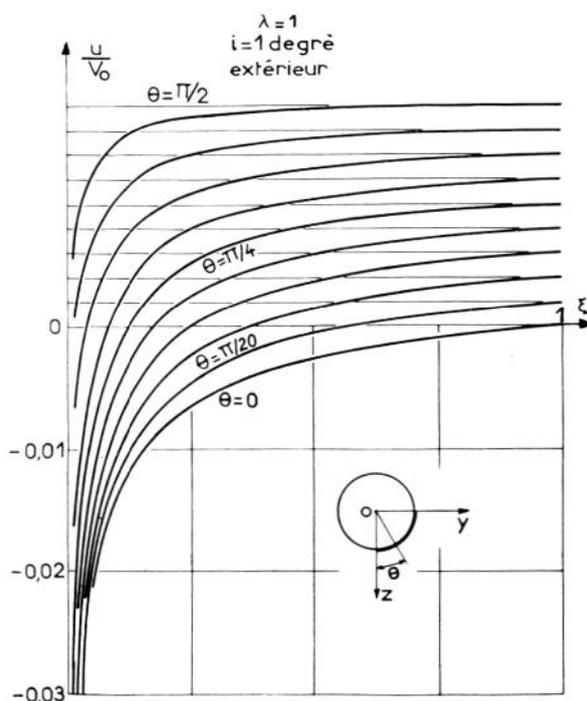


FIG. 15.

Les survitesses ont été déterminées le long de dix cordes comprises entre  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi/2$ , les résultats sont présentés sur la figure 14 pour la face intérieure de l'aile et sur la figure 15 pour la face extérieure dans le cas  $\lambda = 1$ . Les coefficients de pression  $C_p$ , proportionnels aux survitesses, sont tracés sur la figure 16 pour la corde située dans le plan médian  $\theta = 0$  en considérant différentes valeurs de  $\lambda$  ( $i = 1$  degré). Les  $C_p$  correspondant à la corde centrale des ailes rectangulaires d'allongement 1 et 2 sont également portés sur cette figure, à titre de comparaison.

Enfin la figure 17 donne un exemple de courbes isobares ( $C_p =$  constante) obtenues pour la partie  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  dans le cas  $\lambda = 1$ . (les  $C_p$  positifs correspondent à la partie extérieure de l'aile).

4.2. *Effet de fuselage.* Un corps central cylindrique de rayon  $a'$  et de longueur indéfinie est placé à l'intérieur de l'aile. Son axe coïncide avec celui de l'aile et il a donc une incidence  $i$  par rapport à  $V_0$ . La détermination analogique porte encore sur le potentiel transversal  $\varphi_T$ ; les conditions aux limites énoncées ci-dessus ne sont pas modifiées pour la

surface  $A$ , la condition sur le corps central se réduit à  $\partial\varphi_T/\partial n = 0$  et le modèle correspondant est isolant.

Le corps central n'apporte qu'une faible influence sur les caractéristiques aérodynamiques de l'aile, du moins tant que le rapport  $k = a'/a$  est inférieur à 0,5. Sur la figure 18 on a représenté le rapport  $C_{z_k}/C_{z_0}$  de la portance de l'aile annulaire avec ou sans corps central pour diverses valeurs des paramètres  $\lambda$  et  $k$ . La figure 19 donne les survitesses dans le plan médian  $\theta = 0$ , sur le fuselage et les deux faces de l'aile pour  $\lambda = 1$  et  $k = 0,5$  et, comme comparaison, les courbes analogues relatives à l'aile sans corps central ( $k = 0$ ).

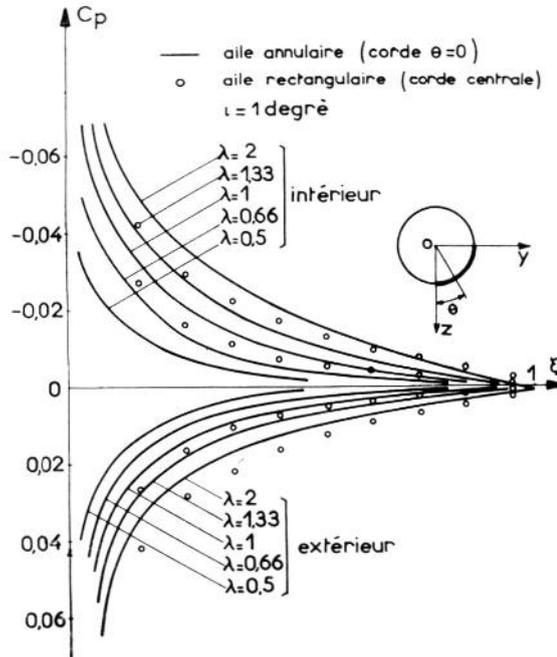


FIG. 16.

4.3. *Aile annulaire munie de plans horizontaux.* Une application de ce type a été envisagée dans le cas de la ligne portante (cf. paragraphe 2). Cette étude a été reprise dans le cadre de la théorie de la surface portante pour l'aile annulaire et les plans horizontaux. Soient  $2L$  l'envergure de l'ensemble,  $l$  l'envergure d'un plan et  $c'$  sa corde, l'incidence des plans horizontaux est la même que celle de la partie annulaire.

Les conditions aux limites concernant le potentiel transversal  $\varphi_T$  sont les mêmes que précédemment pour la surface cylindrique qui schématise l'aile  $A$  et son sillage  $\Sigma$ . Pour les plans horizontaux il faut de plus tenir compte des conditions suivantes:

- (i) glissement du fluide sur les parois  $A'$  des plans, qui exige ici que la dérivée  $\partial\varphi_T/\partial z = 0$  sur les surfaces correspondantes  $A'$ .

- (ii) équilibre de la nappe des tourbillons libres issus des bords de fuite des plans: compte-tenu de la symétrie impaire en  $z$  de la fonction  $\varphi_T$ , cette condition se réduit ici à  $\frac{\partial \varphi_T}{\partial x} = 0$  ou  $2\varphi_T = \Gamma(y)$ . La valeur de la circulation  $\Gamma(y)$  autour du profil d'ordonnée  $y$  est fixée par la condition de Kutta-Joukowski au bord de fuite, soit  $(\frac{\partial \varphi_T}{\partial x})_{B.F.} = 0$ .

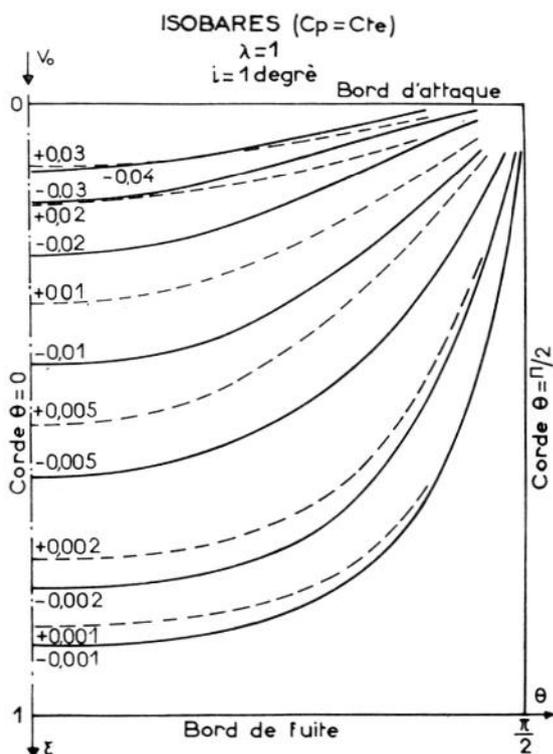


FIG. 17.

La figure 20 donne un exemple de la variation de  $C_z/i$  avec le paramètre  $\lambda$  dans les cas  $\nu = a/L = 0,5$  et  $0,66$  pour des plans horizontaux rectangulaires de corde égale à celle  $c$  de la partie annulaire. Les valeurs obtenues par application de l'anneau portant sont également notées sur cette figure. Le cas limite  $\lambda \rightarrow 0$  de l'approximation de Jones se calcule aisément et donne:

$$\left(\frac{C_z}{i}\right)_{\lambda \rightarrow 0} = \frac{\pi \lambda}{2} \frac{1 + \nu^4}{2\nu^2},$$

les droites correspondant à  $\nu = 0,5$  et  $0,66$  ont été tracées sur la figure 20.

Signalons pour terminer qu'une étude systématique de tels ensembles ailes annulaires munies de plans horizontaux a été effectuée en faisant

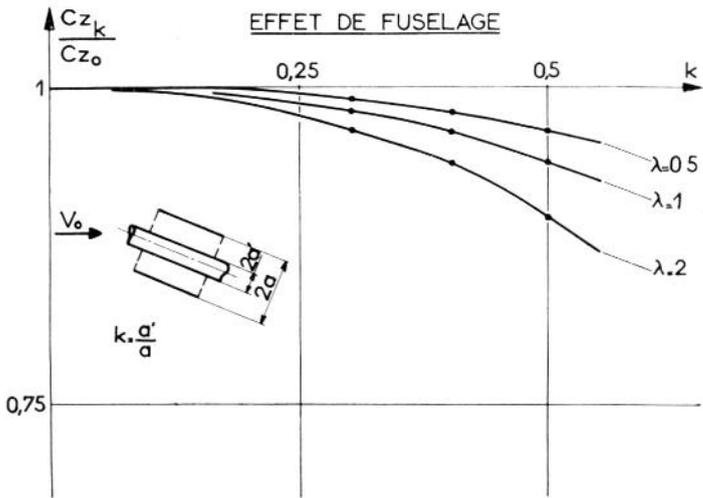


FIG. 18.

varier les paramètres  $\lambda$ ,  $\nu$ ,  $\nu' = c'/c$  ainsi que la forme des plans (rectangulaire et triangulaire). L'analogie électrique a permis de déterminer, dans chaque cas traité, la répartition de circulation sur la surface de l'aile et des plans, un exemple est donné sur la figure 21.

4.4. *Règle des écoulements inverses.* Lorsqu'on connaît ces répartitions de circulation ou celles des survitesses, obtenues par la détermination du potentiel transversal  $\varphi_T$ , la règle des écoulements inverses permet ensuite de calculer aisément le  $C_z$  global pour une loi de pente quelconque

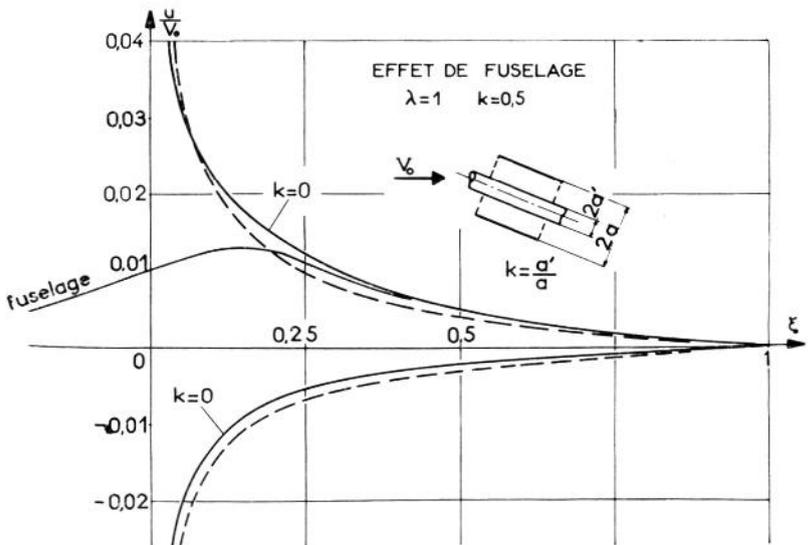


FIG. 19.

$\alpha(x, \theta)$ . Soient deux ailes annulaires, caractérisées par la même valeur de  $\lambda$ , et placées dans des écoulements  $V_0$  et  $-V_0$ , si  $\alpha(x, \theta)$  et  $\alpha_1(x, \theta)$  définissent respectivement leur loi de pente, on a :

$$\int_A \int [u^+ - u^-] \alpha_1(x, \theta) dA = \int_A \int [u_1^+ - u_1^-] \alpha(x, \theta) dA$$

où  $u$  et  $u_1$  sont les survitesses correspondant à ces écoulements.

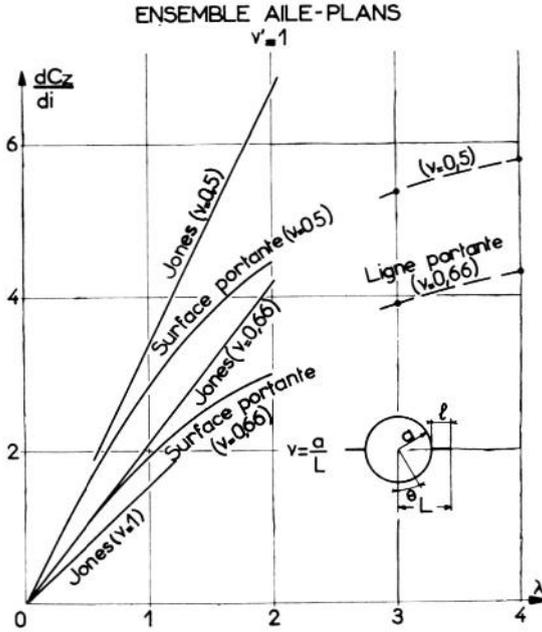


FIG. 20.

En choisissant  $\alpha = \cos \theta$ , le second membre de cette relation donne la portance de l'aile dont la loi d'angle d'attaque est  $\alpha_1(x, \theta)$ . Le premier membre peut être intégré si l'on se donne cette loi  $\alpha_1(x, \theta)$  et si l'on connaît la circulation sur l'aile cylindrique (Cf. par exemple la figure 12, pour  $\lambda = 1$ ). Le même calcul peut être effectué pour une aile annulaire munie de plans horizontaux.

Une application intéressante concerne la détermination d'un effet de volet placé au bord de fuite d'une aile annulaire et braqué d'un angle  $\beta(\theta)$ . En prenant toujours  $\alpha = \cos \theta$  et  $\alpha_1 = \beta$  sur la partie de l'aile occupée par le volet, l'augmentation de portance ainsi obtenue est donnée par :

$$\delta C_z = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \beta(\theta) \gamma(m, \theta) d\theta$$

pour un volet de profondeur relative  $m$ . La valeur  $\gamma(m, \theta)$  correspond à la valeur de la circulation prise sur l'aile cylindrique à l'abscisse  $(1 - m)$ , dans la section d'angle polaire  $\theta$ , (sur la figure 12, par exemple). Ce calcul s'étend, bien entendu, au cas d'un volet placé sur le plan horizontal qui peut être adjoint à l'aile (utilisation des courbes de la figure 21, par exemple).

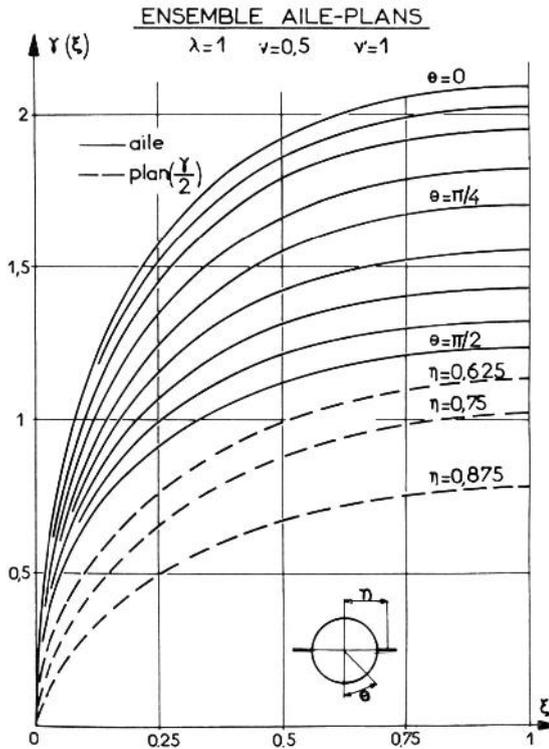


FIG. 21.

#### INFLUENCE D'UNE HELICE CARENEE PAR L'AILE ANNULAIRE<sup>(4)</sup>

1. Le souffle d'une hélice placée à l'intérieur de l'aile annulaire perturbe les caractéristiques aérodynamiques déterminées précédemment. L'analyse de cet effet sera maintenant étudié pour le cas d'une aile annulaire, placée en écoulement axial de vitesse  $V_0$ , enveloppant une hélice de rayon  $a$  dont le plan de rotation est situé à la distance  $d$  du bord d'attaque ( $0 < d < c$ ).

Dans le cadre de l'approximation linéaire il est légitime d'assimiler l'effet de l'hélice à celui d'une discontinuité de pression répartie le long du disque balayé par les pales. L'écoulement conserve ainsi la symétrie de révolution et peut être défini dans un plan méridien  $xOy$ .

Soient  $(u + V_0)$  la vitesse axiale du fluide en un point  $(x, y)$  du champ,  $v$  la vitesse radiale,  $(u_1 + V_0)$  la vitesse axiale, supposée continue, à la traversée du disque représentant l'hélice,  $q = 2(p - p_0)/\rho V_0^2$  la pression réduite qui règne en un point de l'écoulement ( $p_0$  valeur de la pression à l'infini) et enfin  $\delta q = \delta q_0 \cdot f(\eta)$  la discontinuité de pression sur le cercle de l'hélice de rayon réduit  $\eta = y/a$ .

Les équations qui définissent l'écoulement sont classiques :

$$\text{(Euler)} \quad V_0 \frac{\partial q}{\partial x} = -2 \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{et} \quad V_0 \frac{\partial q}{\partial y} = -2 \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\text{(continuité)} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y} = 0$$

$$\text{(tourbillon)} \quad \zeta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

et l'on en déduit que la pression  $q$  est une fonction harmonique de révolution, donc susceptible d'une représentation analogique.

L'intégration de la première équation d'Euler fournit une relation entre les vitesses et les pressions, soit  $q + 2u/V_0 = g(\eta)$ . La fonction  $g(\eta)$ , liée au vecteur tourbillon, peut être précisée en divisant le plan méridien en deux régions: l'une ( $I$ ) constituée par la veine fluide soufflée (rayon  $a$  et longueur indéfinie vers l'aval) entièrement tourbillonnaire, l'autre ( $E$ ) où le tourbillon est supposé nul. En conséquence, on a  $q + 2u/V_0 = 0$  dans ( $E$ ) et  $q + 2u/V_0 = \delta q_0 \cdot f(\eta)$  dans ( $I$ ).

Le long de la ligne qui prolonge le profil de l'aile, segment  $(0, c)$ , et qui limite les régions ( $I$ ) et ( $E$ ), l'égalité des pressions  $q^+$  et  $q^-$  conduit à la relation  $u^+ - u^- = -V_0 \delta q_0 f(1)/2$ ; cette relation est désormais considérée sur la coupure  $(c, +\infty)$  rectiligne, obtenue en négligeant la contraction de la veine soufflée.

Remarquons que:

- (i) Si  $f(1) = 0$ , il n'y a pas discontinuité des vitesses à la limite des régions ( $E$ ) et ( $I$ ).
- (ii) si  $f(\eta) = 1$ , il y a discontinuité des vitesses à la limite, mais la région ( $I$ ) devient irrotationnelle; il existe alors un potentiel des vitesses de perturbation dans tout le plan méridien entaillé par le segment  $(0, +\infty)$ .

Il est facile d'introduire la circulation réduite  $\gamma = \Gamma/V_0 a$  autour d'une pale dans les relations précédentes. La traction de l'hélice déduite du saut de pression donne:

$$\gamma = \pi V_0 \delta q_0 f(\eta) / n a \Omega$$

où  $n$  est le nombre de pales et  $\Omega$ , la vitesse angulaire de l'hélice.

2. *Hélice carénée à circulation constante.* Pour une hélice carénée l'espace libre entre l'aile et l'hélice est pratiquement nul, il est donc vraisemblable d'admettre que la circulation conserve une valeur finie en bout de pale. Cette propriété explique le gain de traction observé pour une hélice sous carénage.

L'hypothèse  $\gamma = \text{constante}$ , ou  $f(\eta) = 1$ , peut ainsi être considérée comme une approximation légitime dont l'intérêt réside dans l'existence du potentiel des vitesses signalé ci-dessus. Le calcul des caractéristiques aérodynamiques induites sur le profil de l'aile est alors notablement simplifié.

Ce potentiel  $\varphi$  doit satisfaire les conditions aux limites suivantes:

(a)  $\partial\varphi/\partial n = 0$  le long de la coupure  $(0, c)$  qui représente le profil rectiligne de l'aile, placé parallèlement à  $V_0$ .

(b) la discontinuité du potentiel  $\varphi^+ - \varphi^- = V_0 x \delta q_0/2 + K$  avec  $x > c$ , le long de la coupure  $(c, +\infty)$  qui figure la ligne de séparation des régions  $(E)$  et  $(I)$ ; la dérivée normale  $\partial\varphi/\partial n$  demeure continue à la traversée de cette coupure.

(c) la continuité des vitesses au bord de fuite du carénage exige que:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\varphi^+ - \varphi^-)_{\text{B.F.}} = V_0 \delta q_0/2$$

et détermine, par conséquent, la constante d'intégration  $K$ .

(d) à l'infini aval, c'est-à-dire pratiquement à une grande distance  $x = X$  de l'hélice, les vitesses radiales s'annulent et le potentiel prend des valeurs  $\varphi_\infty^-$  et  $\varphi_\infty^+$ , sur la direction perpendiculaire à l'axe de révolution, dans les régions  $(I)$  et  $(E)$ . La différence  $\varphi_\infty^- - \varphi_\infty^+$  est d'ailleurs égale à la valeur  $V_0 X \delta q_0/2 + K$  prise sur la ligne  $(0, x)$ .

Le potentiel ne présente pas de singularité au droit de l'hélice puisque la vitesse  $u_1$  demeure continue à sa traversée. Cette vitesse ne possède plus de relation simple avec la vitesse  $u_\infty$  (elle en vaut la moitié dans le cas d'une hélice libre et lui est égale dans le cas d'une hélice tournant à l'intérieur d'un carénage infiniment long (cas  $\lambda \rightarrow \infty$  et  $\lambda = 0$ )).

La représentation analogique de la fonction  $\varphi$  a d'abord permis d'obtenir sa variation le long du profil avec le paramètre  $\lambda$ . D'après la condition (b) il est clair que cette variation ne dépend pas de la distance  $d$  qui fixe la position de l'hélice à l'intérieur de l'aile. Il en est de même pour les survitesses le long du profil à l'extrados et aussi à l'intrados, comme on peut le constater d'après les courbes tracées figure 22 pour les cas  $\lambda = 0,75 - 1 - 1,25 - 1,5$  et  $2$ . Ces survitesses ont pu également être déterminées analogiquement à l'intérieur de l'aile et en particulier au droit de l'hélice pour ces différentes valeurs de  $\lambda$ .

L'influence de l'hélice sur l'aile se traduit globalement par un effort radial  $Cz$  dont la valeur est négative lorsque la traction est positive.

L'évolution de cet effort radial  $Cz$  avec  $\lambda$  est donné sur la figure 23 dans le cas  $d = c/2$ . Pour  $\lambda$  fixé,  $Cz$  varie linéairement avec  $d$ .

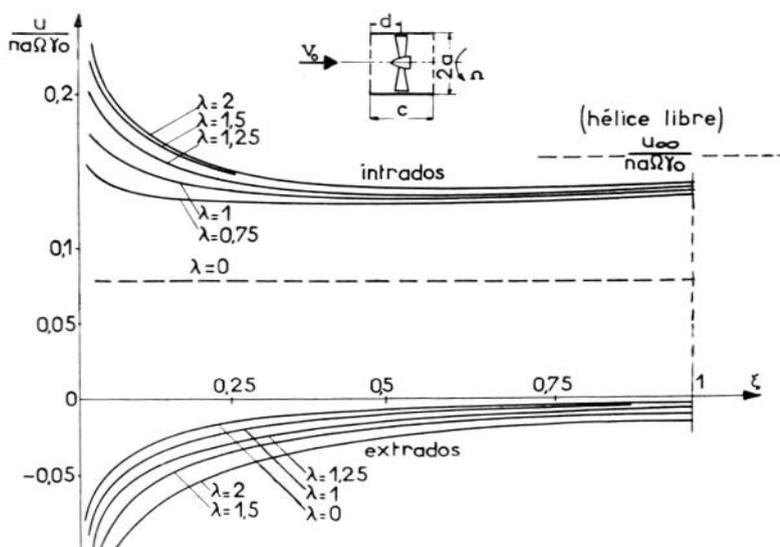


FIG. 22.

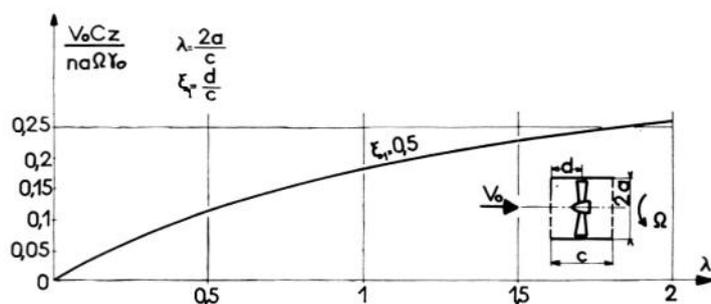


FIG. 23.

3. *Application du potentiel de pression.* La fonction  $q$  se prête particulièrement bien à la solution analogique de nombreux problèmes concernant le carénage d'une hélice. Sa représentation à la cuve électrique permet ainsi de tenir compte d'une variation de la discontinuité de pression  $\delta q$  suivant le rayon  $\eta$ . Divers problèmes ont pu ainsi être traités et en particulier:

- (i) la recherche de l'incidence idéale du profil d'un carénage conique et sa variation avec  $\lambda$  pour plusieurs lois  $f(\eta)$ .
- (ii) la recherche de la forme du profil qui supporte une loi de charge donnée lorsque  $\lambda$  et  $f(\eta)$  varient, avec pour cas particulier l'adaptation de l'entrée du carénage.

## CONCLUSION

La méthode d'analogie rhéoelectrique permet de résoudre un grand nombre de problèmes pratiques concernant l'aile annulaire. Quelques applications ont été décrites à titre d'exemples. Les résultats présentés donnent une idée des possibilités du calcul analogique pour la détermination des divers types d'écoulement autour de l'aile annulaire:

- (i) écoulements à symétrie axiale pour l'étude de la forme des profils.
- (ii) écoulements tridimensionnels avec sillage de tourbillons libres pour l'étude de différentes configurations de surfaces portantes annulaires munies ou non de plans auxiliaires.
- (iii) écoulements perturbés par la présence d'un saut de pression figurant l'hélice.

Suivant la nature des conditions aux limites définissant ces écoulements le choix de l'analogie peut porter sur le potentiel des vitesses ou sur le potentiel des pressions. Les procédés analogiques présentent une grande souplesse d'utilisation et leur exploitation est profitable pour la résolution de la plupart des problèmes concernant la théorie générale des surfaces portantes de tous types.

## REFERENCES

1. L. MALAVARD, The Use of the Rheoelectrical Analogies in Aerodynamics, AGARDograph, August 1956, NATO, AGARD, Palais de Chaillot, Paris.
2. L. MALAVARD, R. DUQUENNE, M. ENSELME, and C. GRANDJEAN, Propriétés calculées d'ailes en delta échancré ou non. Calcul par analogies électriques, Note Technique ONERA. N° 25, 1955.
3. R. DUQUENNE et C. GRANDJEAN, Calcul par analogie rhéoelectrique de l'effet d'épaisseur sur des ailes symétriques à la portance nulle, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 12 Avril 1954.
4. G. HACQUES, Problèmes de la surface portante annulaire traités par la méthode des analogies rhéoelectriques, Thèse, Université de Paris, 1958.
5. J. WEISSINGER, The Influence of Profile Thickness on Ring Airfoils in Steady Incompressible Flow, Contrat AF 61 (514)-904, A.R.D.C., January 1957.
6. J. WEISSINGER, The Ring Airfoil with Deflected Control Surface in Steady Incompressible Flow, Contrat AF 61 (514)-904, A.R.D.C., January 1957.
7. J. WEISSINGER, Einige Ergebnisse aus der Theorie des Ringflugels in inkompressibler Stromung, Communication au Congrès de l'I.C.A.S., Septembre 1958.
8. G. HACQUES, Calcul de l'effet de conicité d'une aile annulaire de révolution en écoulement axial par la méthode des analogies rhéoelectriques, *C. R. Acad. Sci., Paris*, t. 245, pp. 1510-1513, Oct. 1957.
9. G. HACQUES, Calcul par analogie rhéoelectrique de la courbure ou de l'épaisseur d'un profil d'aile annulaire satisfaisant à une distribution de pression imposée, lorsque l'écoulement présente la symétrie axiale, *C. R. Acad. Sci., Paris*, t. 245, pp. 1700-1703, Nov. 1957.
10. L. MALAVARD, Recent developments in the method of the rheoelectric analogy applied to aerodynamics, *J. Aero. Sci.*, Vol. 24, N° 5, May 1957.

11. G. HACQUES, Calcul de l'effet d'incidence d'une surface portante annulaire par la méthode des analogies rhéoelectriques, *C. R. Acad. Sci., Paris*, t. 245, pp. 2476-2479, 23 Déc. 1957.
12. R. DUQUENNE, Sur le calcul analogique des surfaces portantes, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 26 Mai 1952.
13. H. S. RIBNER, The Ring Airfoil in Non-axial Flow, *J. Aero. Sci.*, No. 9, Sept. 1947.
14. H. S. FLETCHER, Experimental Investigation of Lift, Drag and Pitching Moment of Five Annular Airfoils, NACA, T.N. 4117, Oct. 1957.

#### DISCUSSION

G. ERNST\*: Dans le cas d'une aile annulaire avec un fuselage central, le fuselage a-t-il une longueur finie ? Sinon, est-il possible d'envisager des essais correspondant à une longueur finie ?

G. HACQUES: Comme il est indiqué dans la communication, les cas étudiés concernent un fuselage de longueur infinie; néanmoins la méthode permet de traiter sans difficulté le cas d'un fuselage de longueur finie.

\* SNECMA, France.